Решение на Теоремата на Ъркърт публикувано
в списание “Обучение по Математика и информатика” бр. 3 1990г
.

права и разстояние.

А сега ще дадем възможност на читателите да се запознаят с още две нейни доказателства, представящи различни идеи.

1. Доказателството на **Желязко Домбашов** от Смолян.

Теорема на Ъркърт. Ако за фигурата на черт. 1 имаме:

(1) $$AB+BF=AD+DF, \text{ то}$$

(2) $$AC+CF=AE+EF.$$

Доказателството ще извършим само с помощта на равнобедрени триъгълници, външен ъгъл в триъгълник и вписани ъгли.

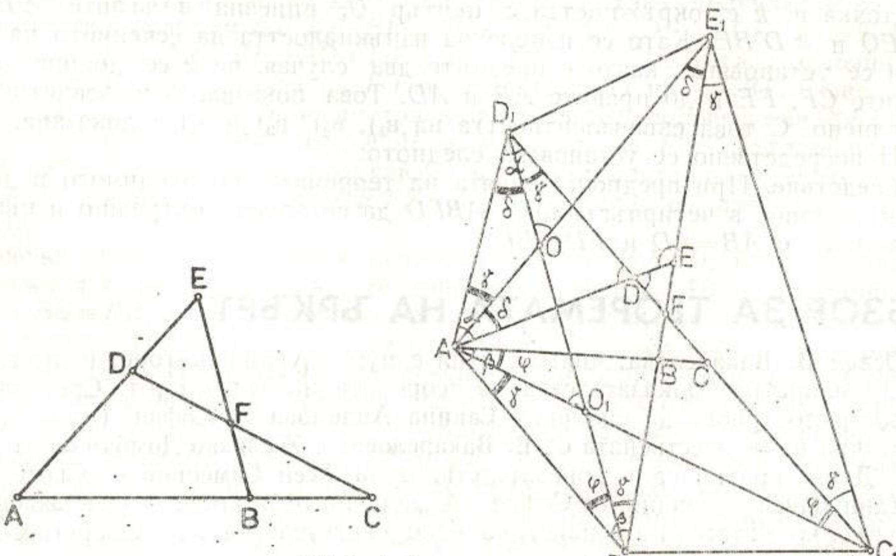
На дадената фигура правим следните допълнителни построения (черт. 2):

Върху продължението на FD построяваме

(3) $DD_1=AD$; следователно $\triangle ADD_1$ е равнобедрен,

(4) $$\sphericalangle AD_1D=\sphericalangle D_1AD=\alpha.$$

Върху продължението на FB нанасяме



Черт. 1, 2

(5) $BB_1=AB$; следователно $\triangle ABB_1$ е равнобедрен и

(6) $\sphericalangle AB_1B=\sphericalangle B_1AB=\beta$. От (1), (3) и (5) следва, че $D_1F=B_1F$.

Следователно триъгълникът D_1FB_1 е равнобедрен и

(7) $$\sphericalangle B_1D_1F=\sphericalangle D_1B_1F=\gamma.$$

Върху продължението на FE нанасяме

(8) $EE_1=AE$; следователно $\triangle AEE_1$ е равнобедрен и

(9) $$\sphericalangle E_1AE=\sphericalangle AE_1E=\delta.$$

Върху продължението на FC нанасяме

(10) $CC_1=CA$; следователно $\triangle AC_1C$ е равнобедрен и

(11) $$\sphericalangle CAC_1=\sphericalangle AC_1C=\varphi.$$

В равнобедрените триъгълници AEE_1 и ADD_1 $\sphericalangle AEE_1>\sphericalangle ADD_1=\sphericalangle EDF$, като външни ъгли в $\triangle DEF$. Следователно $\alpha>\delta$. Аналогично $\beta>\varphi$.

От (4), (7) и (9) следва

(12) $$\sphericalangle D_1AE_1=\alpha-\delta \quad \text{и} \quad \sphericalangle AD_1B_1=\alpha-\gamma.$$

Но $\sphericalangle D_1OE_1=\alpha-\delta+\alpha-\gamma=\gamma+\delta$, като външен ъгъл за триъгълниците AOD_1 и OB_1E_1. Следователно $\alpha=\gamma+\delta$. Като вземем предвид (12) получаваме

(13) $$\sphericalangle D_1AE_1=\gamma.$$

Аналогично

(14) $$\sphericalangle AB_1O_1=\varphi.$$

Лесно се установява, че точките A, B_1, C_1 са в една полуравнина относно правата DE. От (7) и (13) следва, че отсечката D_1E_1 се вижда от точките A и B_1 под ъгъл γ. Следователно точките A, B_1, E_1, D_1 принадлежат на една окръжност k. AD_1 е хорда в тази окръжност. От (11) и (14) следва, че хордата AD_1 се вижда от точките B_1 и C_1 под ъгъл φ. Значи точките B_1 и C_1 принадлежат на окръжността k. Следователно точките A, B_1, C_1, E_1, D_1 принадлежат на окръжността k.

Следователно $\sphericalangle D_1C_1E_1=\sphericalangle D_1AE_1=\gamma$, като вписани ъгли;

аналогично $\sphericalangle B_1E_1C_1=\sphericalangle BD_1C_1=\gamma$, като вписани ъгли.

Следователно $\triangle C_1E_1F$ е равнобедрен. $FC_1=FE_1$. Като вземем предвид (8) и (10) получаваме

$$AC+CF=AE+EF.$$