ПАРАМЕТРИЧНИ КВАДРАТНИ НЕРАВЕНСТВА

Задача 1. Дадено е неравенството

(1) $$f(x)=(m-2)\,x^2-2mx+2m-3>0.$$

Да се определят реалните стойности на параметъра m така, че

1.1 неравенството да няма решения;

1.2 всяко x да е решение на неравенството;

1.3 всяко $x>0$ да е решение на неравенството;

1.4 всяко $x<1$ да е решение на неравенството;

1.5 неравенството да има поне едно решение <1;

1.6 решенията на (1) да $\in [1,2]$;

1.7 неравенството (1) да се удовлетворява за $x\in[1,2]$;

1.8 решенията на неравенството (1) да удовлетворяват неравенството $|x|\leq 2$;

1.9 от неравенството (1) да следва неравенство

(2) $$x^2-3x+2\leq 0;$$

1.10 от неравенството (2) да следва неравенство (1);

1.11 всяко решение на неравенство (1) да е по-голямо от всяко решение на неравенство (2).

Нека D е дискриминантата на квадратния тричлен (1).

При задача 1.1 учениците веднага записват НДУ

(3) $$\begin{cases} D\leq 0, \\ m-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2-7m+6\geq 0, \\ m<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\in(-\infty,1]\cup[6,\infty), \\ m\in(-\infty,2) \end{cases} \Rightarrow m\in(-\infty,1].$$

За задача 1.2 НДУ всяко x да бъде решение на неравенство (1) са

(4) $$\begin{cases} D<0, \\ m-2>0 \end{cases} \Rightarrow m\in(6,\infty).$$

1.3 За да бъде всяко $x>0$ решение на (1) трябва числата $x\in(0,\infty)$ да принадлежат на множеството от решения на неравенство (1). Припомняме какви са възможните случаи за решения на квадратното неравенство, които можем да използваме:

а) ако всяко x е решение на неравенството (1), то и всяко $x>0$ ще бъде решение. Следователно решенията на (4) са решения на задачата, т. е. $m\in(6,\infty)$;

б) ако неравенството (1) има решения извън корените x_1 и x_2 на квадратния тричлен, т. е. ако

(5) $$\begin{cases} D\geq 0, \\ m-2>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\in[1,6], \\ m\in(2,\infty), \end{cases} \Rightarrow m\in(2,6].$$

За да бъде всяко $x>0$ решение на (1) НДУ са още x_1 и $x_2\leq 0$, т. е.

(6) $$\begin{cases} D\geq 0, \\ x_1+x_2\leq 0, \\ x_1x_2\geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\in[1,6], \\ \dfrac{2m}{m-2}\leq 0, \\ \dfrac{2m-3}{m-2}\geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\in[1,6], \\ m\in[0,2), \\ m\in\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]\cup(2,\infty), \end{cases} \Rightarrow m\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right].$$

От (5) и (6) следва, че в този случай решения няма. Следователно решенията на задача 1.3 са решенията от а) $m\in(6,\infty)$.

При решаване на задача 1.4 аналогично получаваме, че решенията на (4) $m\in(6,\infty)$ са решения на задача 1.4. Другата възможност е неравенство (1) да има решения извън корените x_1 и x_2 на квадратния тричлен (1), т. е. да е изпълнено (5) $m\in(2,6]$ и x_1 и $x_2\geq 1$, за което НДУ са

$$(7)\quad \left|\begin{array}{l} D\geq 0,\\ (m-2)f(1)\geq 0\\ x_1+x_2\geq 2, \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} m\in[1,6],\\ (m-2)(m-5)\geq 0,\\ \dfrac{2m}{m-2}-2\geq 0, \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} m\in[1,6],\\ m\in(-\infty,2]\cup[5,\infty),\\ m\in(2,\infty) \end{array}\right. \Rightarrow m\in[5,6].$$

Следователно решенията на задача 1.4 са решенията на (4) и общите решения на (5) и (7), т. е. $m\in[5,\infty]$.

След анализ на задача 1.5 стигаме до извода, че неравенство (1) ще има поне едно решение <1, ако:

а) всяко x е решение на (1), т. е. ако е изпълнено (4) $m\in(6,\infty)$;

б) решенията на неравенство (1) са извън корените на квадратния тричлен, т. е. ако е изпълнено (5) $m\in(2,6]$;

в) решенията на неравенство (1) са между корените x_1 и x_2 на квадратния тричлен, т. е.

$$(8)\quad \begin{array}{l} D>0,\\ m-2<0, \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} m\in(1,6),\\ m\in(-\infty,2), \end{array}\right. \Rightarrow m\in(1,2),$$

и $x_1<1<x_2$, за което НДУ е:

$$(9)\quad (m-2)f(1)<0 \Rightarrow m\in(2,5)$$

или $x_1,\ x_2\leq 1$, НДУ за което са:

$$(10)\quad \left|\begin{array}{l} D>0,\\ (m-2)f(1)\geq 0,\\ x_1+x_2<2, \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} m\in(1,6),\\ m\in(-\infty,2]\cup[5,\infty),\\ m\in(-\infty,2), \end{array}\right. \Rightarrow m\in(1,2).$$

Следователно решенията на в) са $m\in(1,2)$, а решение на задача 1.5 е обединението от решенията на а), б), в), т. е. $m\in(1,2)\cup(2,\infty)$. При задача 1.6 с беседа върху следните въпроси: Какво значи решенията на (1) да $\in(1,2)$? Кои са възможните решения на (1)? и др. стигаме до извода, че неравенство (1) трябва да има решения между корените x_1 и x_2 на квадратния тричлен, т. е. да е изпълнено (8) $m\in(1,2)$ и корените $x_1,\ x_2\in[1,2]$, за което НДУ са

$$(11)\quad \left|\begin{array}{l} D\geq 0,\\ (m-2)f(1)\geq 0,\\ (m-2)f(2)\geq 0,\\ x_1+x_2\geq 2,\\ x_1+x_2\leq 4, \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} m\in[1,6],\\ m\in(-\infty,2]\cup[5,\infty),\\ (m-2)(2m-11)\geq 0,\\ m\in(2,\infty),\\ \dfrac{4-m}{m-2}\leq 0, \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} m\in[1,6],\\ m\in(-\infty,2]\cup[5,\infty),\\ m\in(-\infty,2]\cup\left[\frac{11}{2},\infty\right)\\ m\in(2,\infty)\\ m\in(-\infty,2)\cup[4,\infty), \end{array}\right. \Rightarrow m\in\left[\frac{11}{2},6\right)$$

Общите решения на (8) и (11) са решения на задача 1.6, $m\in\varnothing$. При решаване на системите припомняме, че (8) и (11) могат да се разглеждат като една система и ако някои неравенства в нея нямат общи решения както второто неравенство на (8) и четвъртото неравенство на (11), то не е необходимо да се решават всички неравенства в системите. Следователно задача 1.6 в този случай няма решения. Учениците се затрудняват да отговорят на въпроса: Ами ако неравенството (1) няма решения? Тогава използваме свойството на множествата, че всяко празно множество е подмножество на всяко множество. В случая, ако решението на неравенството (1) е празното множество, то то е подмножество на множеството [1, 2]. Следователно решенията на (3) $m\in(-\infty, 1]$ са решения на задача 1.6.

При задача 1.7 стигаме до извода, че са възможни следните случаи:

а) ако всяко x е решение на неравенството (1), то и $x\in[1, 2]$ са решения. Следователно съгласно (4) $m\in(6, \infty)$ са решения на 1.7;

б) ако решенията на (1) са между корените x_1 и x_2 на квадратния тричлен, т. е. ако е изпълнено (8) $m\in(1, 2)$ и числата 1 и 2 са между x_1 и x_2, т. е. изпълнено е (9) $m\in(2, 5)$ и (12) $(m-2)f(2)<0$, то полученото m е решение. Но от (8) и (9) $m\in\varnothing$. Следователно в този случай задачата няма решение;

в) ако решенията на неравенство (1) са извън корените на квадратния тричлен, т. е. ако е изпълнено (5) $m\in(2, 6]$, то за да бъде $x\in[1, 2]$ решение на (1), трябва x_1, $x_2<1$, НДУ за което са:

$$\left|\begin{array}{l} D\geqq 0, \\ (m-2)f(1)>0, \Rightarrow \\ x_1+x_2<2, \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} m\in[1, 6], \\ m\in(-\infty, 2)\cup(5, \infty), \Rightarrow m\in[1, 2) \\ m\in(-\infty, 2), \end{array}\right.$$

или x_1 и $x_2>2$, за което НДУ са:

$$(13) \qquad \left|\begin{array}{l} D\geqq 0, \\ (m-2)f(2)>0, \Rightarrow \\ x_1+x_2>4, \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} m\in[1, 6], \\ m\in(-\infty, 2)\cup\left(\frac{11}{2}, \infty\right), \Rightarrow m\in\varnothing. \\ m\in(2, 4), \end{array}\right.$$

След като намерим сеченията и обединенията на получените множества, получаваме, че в този случай задачата няма решение.

От а), б), в) получаваме, че решенията на задача 1.7 са $m\in(6, \infty)$.

В задача 1.8 неравенството $|x|<2$ е еквивалентно на $x\in[-2, 2]$. Учениците веднага съобразяват, че това е аналогичен случай на задача 1.6. За да решим задача 1.9 е необходимо да изясним на учениците какво значи от неравенството (1) да следва неравенство (2) или едно неравенство да е следствие на друго, след което правим извода, че решенията на (1) трябва да са решения на (2). Но решенията на (2) са $x\in[1, 2]$. Следователно решенията на (1) трябва да принадлежат на множеството [1, 2]. И тук, както в задача 1.6, възниква въпросът: Ами ако неравенството (1) няма решение? Ако приемем в този случай, че от неравенство (1) не следва (2), то тогава (1) ще има решения, които не са решения на (2), а това не е вярно. Следователно, ако неравенство (1) няма решения, то от него следва (2). Следователно задача 1.9 е еквивалентна на 1.6.

При задача 1.10 като използуваме казаното в задача 1.9, че решенията на неравенство (2) са решения на (1), следва, че тази задача е еквивалентна на 1.7.

След като решенията на неравенство (2) са $x\in[1,2]$, то за да решим задача 1.11 трябва всички решения на (1) да са по-големи от 2. Веднага се вижда, че единственият случай, в който е възможно това, е неравенство (1) да има решения между корените x_1, x_2 на квадратния тричлен, т. е. да е изпълнено (8) $m\in(1, 2)$ и x_1, $x_2>2$, т. е. да е изпълнено (13) $m\in\varnothing$. Следователно задача 1.11 няма решение.

При решаване на задачите обръщаме внимание на учениците, че ако дискриминантата на квадратния тричлен е точен квадрат, то за x_1 и x_2 получаваме по-удобен вид и някои от записаните дотук НДУ могат да се опростят.

Като пример може да се разгледа следната

Задача 2. Дадено е неравенството:

(14) $$x^2-(3a+1)x+2a^2-a-6<0.$$

За кои реални стойности на параметъра a всяко $x\in[1, 2]$ е решение?

Намираме дискриминантата $D=(a+5)^2$ и $x_1=2a+3$, $x_2=a-2$. Решенията на неравенство (14) са между корените x_1, x_2 на квадратния тричлен. За да ги намерим, трябва да сравним по големина корените x_1 и x_2.

При $a\leqq-5$ $x\in(2a+3, a-2)$. За да бъде $x\in[1, 2]$ решение, трябва

$$\begin{cases} 2a+3\leqq 1, \\ a-2\geqq 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\leqq -1, \\ a\geqq 4 \end{cases} \Rightarrow a\in\varnothing \qquad \text{при } a>-5,\ x\in(a-2, 2a+3).$$

Следователно

$$\begin{cases} a-2\leqq 1, \\ 2a+3\geqq 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\leqq 3, \\ a\geqq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a\in\left[-\frac{1}{2}, 3\right],$$

т. е. решението на задача 2 е $a\in\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$.

Аналогично се разглеждат другите възможни подусловия на задача 2, формулирани в задача 1.

След като сме припомнили основните задачи от показателни, логаритмични, тригонометрични неравенства, заместваме в неравенство (1) реалния параметър m с друг, например $m=2^k$,

$$m=\log_2 n;\ m=\sin\alpha;\ m=2^{\sin\alpha};\ m=\log_2\sin\alpha;\ m=|a|+1 \text{ и т. н.}$$

Съобразно възможностите на учениците искаме да бъдат определени реалните параметри k, m, α, a така, че да са изпълнени условията 1.1 до 1.11 Учениците веднага разбират, че за да се решат тези задачи, трябва да се намери m, след което да се решат основни показателни, логаритмични, тригонометрични неравенства и неравенства с абсолютни стойности, като се използуват свойствата на съответните функции. Решаването на тези задачи няма да разглеждаме, защото са добре познати. При решаването на задачите можем да правим промяна в посоките на дадените неравенства, да включваме и да изключваме някои от краищата на интервалите, да правим допълнителни ограничения за параметрите и да правим изводи за съответните НДУ.

Можем да разглеждаме и друга група от неравенства, като:

Задача 3. Дадено е неравенството

(15) $$16x^2+axy-y\geqq x-16y^2-\frac{1}{64}.$$

За кои стойности на реалния параметър a неравенството се удовлетворява за всяка наредена двойка числа (x, y), за които $|x|=|y|$?

След кратък анализ на задачата учениците веднага съобразяват, че $x=\pm y$. Следователно неравенство (15) е еквивалентно на неравенствата:

(16) $$(32+a)x^2-2x+\frac{1}{64}\geqq 0, \text{ ако } x=y \text{ и}$$

(17) $$(32-a)x^2+\frac{1}{64}\geqq 0, \text{ ако } y=-x,$$

които са аналогични на задача 1.2.

Задача 4. Дадено е неравенството

(18) $$2x^2-2\sqrt{a+b}\,.x+c>0.$$

Да се докаже, че всяко x е решение на неравенството, ако $2c^2=a^2+b^2$ и a, b, c са положителни, $a\neq b$.

Всяко x е решение на неравенството (18), ако $D=4(a+b-2c)<0$. Но $(a-b)^2>0\Rightarrow a^2+b^2>2ab\Rightarrow 2(a^2+b^2)>2ab+a^2+b^2\Rightarrow 2(a^2+b^2)>(a+b)^2$. Като се използува условието на задачата, получаваме $4c^2>(a+b)^2\Rightarrow 2c>a+b\Rightarrow$ $\Rightarrow D<0$, т. е. всяко x е решение на (18). Може да се разгледа и неравенство, което се свежда до квадратно, например:

Задача 5. Дадено е неравенството

(19) $$4^x-a.2^x-a+3\leq 0.$$

За кои стойности на реалния параметър a неравенството има поне едно решение?

Учениците веднага съобразяват, че може да се положи $y=2^x$

(20) $$y^2-ay-a+3\leq 0.$$

Като имаме предвид, че $2^x>0$, то неравенство (19) ще има поне едно решение, ако неравенство (20) има поне едно положително решение. Задачата е аналогична на 1.5.

Задача 6. Дадено е неравенството

(21) $$a^2+2a-\sin^2x-2a\cos x>2.$$

За кои стойности на реалния параметър a неравенството се удовлетворява за всяко x?

Полагаме $\cos x=y$.

(22) $$y^2-2ay+a^2+2a-3>0, \text{ но } \cos x\in[-1,1].$$

Следователно, за да бъде всяко x решение, трябва решенията на (22) $y\in[-1,1]$. Но тази задача се решава както 1.6.

По този начин можем да запишем и други задачи, при които могат да се положат други функции.

Разглежданата тема може успешно да се използува при подготовката на кандидатстуденти, в кръжочни и факултативни занимания, а част от нея в 8. и 9. клас.

Задачи за самостоятелна работа

Дадени са неравенствата:

1. $x^2-(3m+1)x+m>0$. За кои стойности на реалния параметър m всяко $x>1$ е решение?
2. $\dfrac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>-1$. За кои стойности на m всяко x е решение?
3. $x^2-2^{a+2}x-2^{a+3}+12>0$. За кои реални стойности на a всяко x е решение?
4. $4\lg_{\frac{1}{2}} a-3+4x\log_{\frac{1}{2}} a-x^2>0$. За кои стойности на a има поне едно решение?
5. $3-|x-a|>x^2$. За кои стойности на a има поне едно отрицателно решение?
6. $(a+b)x^2-2cx+a+b>0$. Да се докаже, че всяко x е решение, ако a, b, c са страни в триъгълника.
7. $\left|\dfrac{x^2+kx+1}{x^2+1}\right|<2$. За кои стойности на k всяко x е решение?